

同変トポロジーと Fourier 変換

2021/6/3

[数学・数理学部 最前線 I]

(群作用による
symplectic 多様体への高) $\longleftrightarrow$ Fourier 変換

§ S^1 作用

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad \text{Lie 群}$$

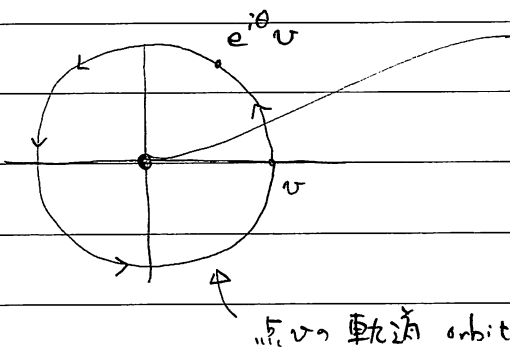
S^1 が作用する多様体 $S^1 \curvearrowright M$

$$S^1 \times M \rightarrow M$$

$$(z, x) \mapsto z \cdot x$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x = x \\ z_1 \cdot (z_2 \cdot x) = (z_1 z_2) \cdot x \end{cases} \quad \forall z_1, z_2 \in S^1, \forall x \in M.$$

(例) $S^1 \curvearrowright \mathbb{C}$ 通常, スカラー倍.

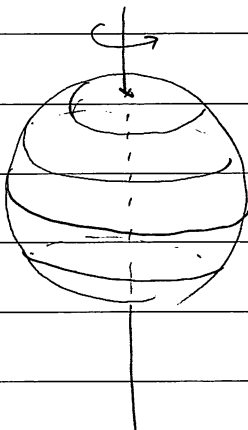


原点は S^1 作用で不変

この点 v は 固定点 (fixed pt) といふ

点 v の軌道 orbit

$S^1 \curvearrowright S^2$ ある軸 (z 軸) に関する回転



固定点: 北極と南極

S^1 作用 = M の "回転対称性"

応用 オイラー数 $\chi(M) = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i \dim H^i(M)$

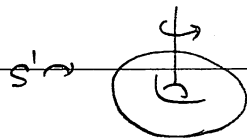
定理 $S' \curvearrowright M$ $\mathbb{Z}$ -作用

$$M^{S'} = \{x \in M \mid z \cdot x = x \ (\forall z \in S')\} \quad \text{が離散}$$

$$\Rightarrow \chi(M) = \#(M^{S'}) \quad (\mathbb{Z} \neq 0)$$

(例)

$$S' \curvearrowright S^2 \quad \chi(S^2) = 2$$



$$\chi(T^2) = 0$$

$\hookrightarrow$ T^2

(証明が必要) $\chi(S^1) = 0 \quad \leftarrow \text{fixed pt なく, orbit} \cong S^1$

$$\chi(\text{1点}) = 1$$

$p \in M$: 固定点 (3H.12.13)

$$\Rightarrow S^1 \curvearrowright T_p M \text{ は線形作用} \quad S^1 \rightarrow GL(T_p M) \text{ 表現}$$

⊙ $\forall z \in S^1 \quad z: M \rightarrow M$ の微分 $d_p z: T_p M \rightarrow T_p M$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ & p & \mapsto p \end{array}$$

$$\Rightarrow T_p M \cong \mathbb{C}^n \text{ with } S^1\text{-action}$$

$$z \cdot (v_1, \dots, v_n) = (z^{w_1} v_1, \dots, z^{w_n} v_n) \quad z \in S^1$$

$$w_1, \dots, w_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{点 } p \text{ での weight 列}$$

定義 S' 作用の moment map $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}$ とは

$$d\mu = -i_X \omega \quad \text{と 77=3 } C^\infty \text{ 関数}$$

但し $i_X \omega(Y) := \omega(X, Y)$ ($i_X \omega$ は 1-form)

内部積

(634) $S' \sim \mathbb{C}$ と $\sqrt{b} = \frac{1}{b}$ の $\mathbb{R}$ - $\mathbb{C}$ map $v = x + iy \in \mathbb{C}$

$$X_v = \left. \frac{d}{d\theta} e^{2\pi i \theta} v \right|_{\theta=0} = 2\pi i v = -2\pi y + 2\pi i x$$

$$= 2\pi \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\omega = dx \wedge dy \text{ 8'1)}$$

$$i_X \omega = 2\pi (-y dy - x dx) = -\pi d(x^2 + y^2) = -d(\pi |v|^2)$$

$$\text{8'1)} \quad \mu(v) = -\pi |v|^2 \quad \text{8'1) moment map}$$

[L10-12] $S' \sim S^2$ z 軸 周り の 左回り の 回転

ω : as above

$$\Rightarrow \text{moment map } \mu = -2\pi z$$

Symplectic 8'1) ζ : μ の 正則 1-形式

moment map は $\mu(z \cdot x) = \mu(x)$. と 77=3 の 2-

$\mu'(z)$ は S' 作用 を 与える. これは その 作用 は "自由"

(固定点 8'1) 5-)

$\sim \mu^{-1}(S)/S'$ is orbifold (orbifold 多様体)

$\sim \exists!$ symplectic form ω_{red} on $\mu^{-1}(S)/S'$

s.t. $\pi^* \omega_{\text{red}} = i^* \omega$

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(S) & \xhookrightarrow{i} & M \\ \pi \downarrow & & \\ \mu^{-1}(S)/S' & & \end{array}$$

(634) $S' \sim \mathbb{C}$ a symplectic form

$$\mu^{-1}(r)/S' = \begin{cases} \text{pt.} & r > 0 \\ \emptyset & r < 0 \end{cases}$$

$S' \sim \mathbb{C}^{n+1}$ a symplectic form $\mu(v_0, \dots, v_n) = \pi(|v_0|^2 + \dots + |v_n|^2)$

$\mu^{-1}(r)/S' = \mathbb{CP}^n \quad r > 0$

§ 同変コホモロジー $S' \sim M$

de Rham complex $\Omega^p(M) = \{p\text{-forms on } M\}$

$$d: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

$d \circ d = 0 \sim$ de Rham コホモロジー が定まる

Cartan model $\Omega_{S'}^*(M) = \underbrace{\Omega^*(M)}_{\sim}^{S^1}[\lambda] \ni \sum_{i=0}^N \alpha_i \lambda^i$

S^1 不変の微分形式

$$\forall z \in S^1 \quad z^* \alpha = \alpha$$

$$\alpha_i \in \Omega^*(M)^{S^1}$$

同変微分 $d_{S^1} = d - \lambda i_X$

$$i_X : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$$

基本ベクトル場、内部積

$\deg \lambda = 2$ と仮定 d_{S^1} は

次数 ≤ 1 上は 0

$$(i_X \alpha)(Y_1, \dots, Y_{p-1}) := \alpha(X, Y_1, \dots, Y_{p-1})$$

[例 1-3] Cartan formula

$$(d \circ i_X + i_X \circ d) \alpha = \frac{d}{d\theta} (e^{-2\pi i \theta})^* \alpha \Big|_{\theta=0} \quad \text{と示す}$$

特に α は S^1 不変ならば $(d i_X + i_X d) \alpha = 0$

$$(d_{S^1})^2 = \underbrace{d^2}_0 - \lambda \underbrace{(d i_X + i_X d)}_0 + \lambda^2 \underbrace{i_X^2}_0 = 0$$

$\sim$ 同変コホモロジー $H_{S^1}^*(M) = H^*(\Omega_{S^1}^*(M), d_{S^1})$

$\mathbb{R}[t]$ -module

補題 M : compact symplectic

ω^n は M 上の定数

$$\alpha \in \Omega_{S^1}^*(M) \quad \text{に対して} \quad \int_M \alpha = \sum_{i \geq 0} \lambda^i \int_M \alpha_i$$

" $\sum_{i \geq 0} d_i \lambda^i$

$$\begin{aligned} \text{もし } \alpha = d_{S^1} \beta \text{ ならば } \int_M \alpha &= \int_M d_{S^1} \beta = \int_M d\beta - \lambda \boxed{i_X \beta} \\ &= \int_M d\beta = 0 \end{aligned}$$

top form
(= 1-form)

Stokes の定理

$$5.2 \quad \int_M : H_{S^1}^*(M) \longrightarrow \mathbb{R}[\lambda] \quad \text{is well-def}$$

固定点公式 (Atiyah-Bott, Berline-Vergne) $M: \text{compact}$

$$\alpha \in \Omega_{S^1}^*(M) \quad d_{S^1} \alpha = 0, \quad S^1 \sim M \text{ の固定点 } p \text{ の集合}$$

$$\Rightarrow \int_M \alpha = \sum_{p \in M^{S^1}} \frac{\alpha(p)}{w(p) \lambda^n}$$

$$w(p) = w_1(p) \cdots w_n(p) \quad w_i(p) \in \mathbb{Z} \text{ は } p \text{ 点の weight}$$

$$\alpha(p) = \alpha|_p \in \mathbb{R}[\lambda]$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{[Lefschetz]} \quad S^1 \sim M \text{ 自由} \quad \exists \psi \in \Omega^1(M)^{S^1} \\ \psi(x) = 1 \quad \forall x \in M \\ i_X \circ (\psi \wedge) + (\psi \wedge) \circ i_X = 1 \\ \left[\Omega^*(M) \xrightarrow{i_X} \Omega^{*-1}(M) \text{ is exact. } \right] \\ \text{Lefschetz} \quad [\alpha] \in H_{S^1}^*(M) \text{ is zero} \quad \int_M \alpha = 0 \text{ である} \end{array} \right.$$

⑧ $\omega: \text{symp form} \quad \mu: M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{moment}$

$$\Rightarrow \omega_{S^1} := \omega - \lambda \mu \quad \text{is } d_{S^1}\text{-closed}$$

$$(d - \lambda i_X) \omega_{S^1} = \underbrace{d\omega - \lambda(d\mu + i_X \omega)}_{=0} + \lambda^2 i_X \mu = 0$$

$\omega: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, symplectic form $\mu = -2\pi \omega$

南半球

$$\int_{S^2} (\omega + 2\pi \lambda) = \frac{2\pi \lambda}{\lambda} + \frac{-2\pi \lambda}{-\lambda} = 4\pi$$

$$\int_{S^2} \omega$$

北半球
南半球

球面、表面積

Fourier 変換

$$\omega_{S^1} = \omega - \lambda \mu$$

1次元級数

$$\int_M e^{\omega_{S^1}}$$

2通りの方法で計算

① 固定点公式: $\sum_{p \in \text{MS}^1} \frac{e^{-\mu(p)\lambda}}{\omega(p)\lambda^n}$

M の volume form
(測度を指す)

$$\textcircled{2} \int_M e^{\omega_{S^1}} = \int_M e^{-\lambda \mu} e^{\omega} = \int_M e^{-\lambda \mu} \left[\frac{\omega^n}{n!} \right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda \zeta} \underbrace{\mu_* \left(\frac{\omega^n}{n!} \right)}_{\substack{M \text{ 上の volume form } \rightarrow \mathbb{R} \text{ への写像} \\ \text{(測度)}}} d\zeta$$

ここで μ の逆、空間の写像

$A \subset \mathbb{R}$ に対して
 $\mu^*(A)$ の measure を
与える

Lemma $\mu_* \left(\frac{\omega^n}{n!} \right) = \left[\int_{\mu^{-1}(\zeta)/S^1} e^{\omega_{red}} \right] d\zeta$

(311) $M = \mathbb{C}^2$ 場合

$$\omega = dx \wedge dy, \quad \mu(v) = \pi|v|^2$$

$$\int_{\mathbb{C}} e^{\omega_{S^1}} = \frac{1}{2} \quad \text{固定点公式 (or 直接計算)}$$

$$\frac{1}{2} \mu_*(dx \wedge dy) = \left(\int_{\underbrace{\mu^{-1}(z)/S^1}_{\text{1 pt. or } \emptyset}} e^{\omega_{red}} \right) dz$$

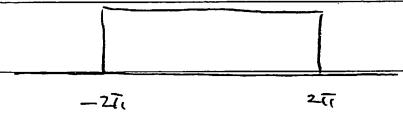
$$= H(z) dz$$

$$H(z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

2.2.17 $T = LPII = \text{Laplace 変換}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda z} H(z) dz = \frac{1}{\lambda}$$

[LPII-15] S^2 のときにも同じことを check せよ.



上の Laplace 変換の関係を用いて

[LPII-16] $\mu_*\left(\frac{\omega^n}{n!}\right)$ は piecewise polynomial measure になることを示せ
(Duistermaat-Heckman measure)

量子化(?)

$$S' \sim M: \quad \pi_1(M) = \{1\}$$

$$LM = \{ \ell: S' \rightarrow M \} \quad \text{自由 L-空間}$$

$$LM_+ = \{ u: D^2 \rightarrow M \text{ hol map} \} \subset \widetilde{LM}$$

の空間

$\tilde{LM}$ 上 $\hbar$ symplectic form Ω { π 定義 2.33
 equivariant version $\Omega_{S' \times S'}$

$S' \times S' = \text{loop rotation } \times \text{ } \times \text{ } \times \text{ } \times \text{ } S' \sim M \text{ } \pi_3 \langle 3 \rangle$
 $\hbar$ λ

$$\int_{LM_+} e^{\Omega_{S' \times S'} / \hbar} \quad \times \quad \int_{L(\tilde{\mu}(s)/s')_+} e^{\Omega_{S'}^{\text{red}} / \hbar}$$

の 1 階後口 ?